Mathematik – 9. Klasse – Trigonometrie

Teste dich!

Anmerkung: Wenn es nicht anders verlangt ist, rundest Du gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle!

Aufgabe 1:
Bleiben wir zunächst einmal allgemein. Ergänze die fehlenden Angaben und übertrage sowohl die Gleichungen als auch die Zeichnung auf ein Extrablatt.

a) $\sin\alpha = \frac{}{}$

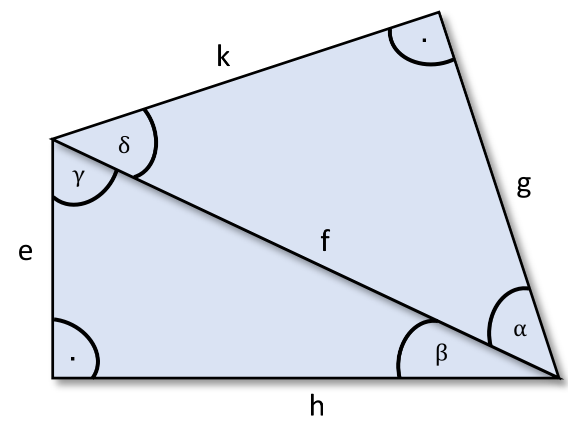
b) $\sin = \frac{h}{}$

c) $\sin\delta = \frac{}{}$

d) $\tan = \frac{h}{}$

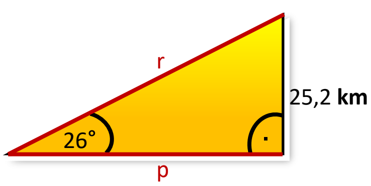
e) $\ \gamma = \frac{e}{f}$

f) $\cos\alpha = \frac{}{}$

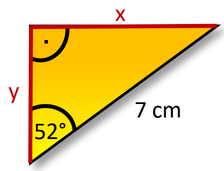


Aufgabe 2:
Berechne die fehlenden Seitenlängen mit dem Taschenrechner.
Tipp: Achte auf die Einheiten!

a)

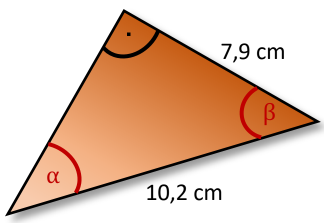


b)

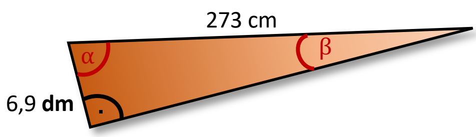


Aufgabe 3:
Berechne die fehlenden Winkelgrößen mit Hilfe des Taschenrechners.
Tipps:
- Wenn du Winkel berechnen willst, musst du „SHIFT“ und „cos“, „sin“ oder „tan“ drücken!
- Achte auf die Einheiten!

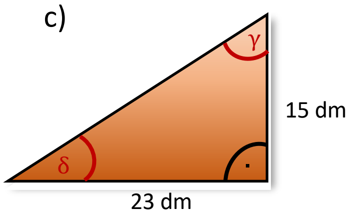
a)



b)

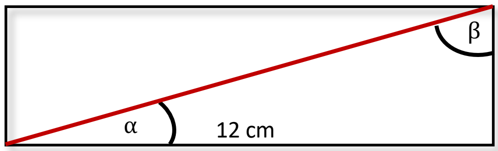


c)



Aufgabe 4:

a) Bestimme in dem Rechteck die Winkel α und β.



Für die Profis: Knifflige Anwendungsaufgaben

Aufgabe 5:

Ein **spitzer Winkel** in einem rechtwinkligen Dreieck wird vergrößert. *Tipp:* Mache eine Skizze!
Wie ändert sich…

a) sein Sinuswert, wenn…
   i) die Hypotenuse gleichbleibt?
   ii) Die Gegenkathete gleichbleibt?

b) sein Kosinuswert, wenn…
   i) die Hypotenuse gleichbleibt?
   ii) die Ankathete gleichbleibt?

c) sein Tangenswert, wenn…
   i) die Gegenkathete gleichbleibt?
   ii) die Ankathete gleichbleibt?

Tipps und Hinweise:
Mit der Formulierung **„ein spitzer Winkel"** ist festgelegt, dass **nicht** der **rechte Winkel** des Dreiecks verändert wird.
Nur Winkel **kleiner als 90°** werden als „spitze Winkel" bezeichnet.

Aufgabe 6:

Ein Radfahrer fährt auf einen Berg.
Auf einer 3 km langen **geraden** Strecke
mit **gleichmäßiger** Steigung gewinnt er 500 m an Höhe.
Wie groß ist der Steigungswinkel der Strecke?
Tipp: Achte auf die Einheiten!

Abb. 1: https://www.radsport-rennrad.de/training/trainingsideen-schneller-bergauf-fahren/

Aufgabe 7:

Ein gleichmäßiger **Skihang** hat eine **Neigung** von **24°**,
die Bergstation liegt auf 2 345 m Höhe,
die Talstation auf 2 223 m Höhe.
Wie lang braucht ein Skifahrer,
der auf direktem Weg mit einer durchschnittlichen
Geschwindigkeit von 20 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von der Berg- zur Talstadion fährt?
Hinweise: Runde auf ganze Zahlen! Wichtige Formel: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Abb. 2: https://www.leifiphysik.de/mechanik/reibung-und-fortbewegung/aufgabe/skifahrer-am-hang

Aufgabe 8:

Die Pyramide des Kukulcán in Mexiko hat eine quadratische Grundfläche mit 55 m Kantenlänge und ist 30 m hoch.

a) Bestimme die Länge der Treppe.

b) Berechne den Neigungswinkel der Treppe gegen die Grundfläche.

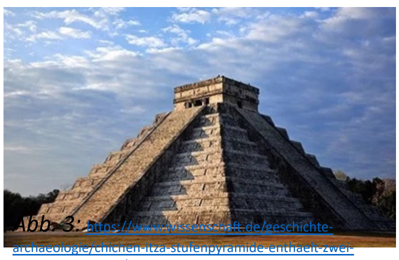


Abb. 3: https://www.wissenschaft.de/geschichte-archaeologie/chichen-itza-stufenpyramide-enthaelt-zwei-vorgaengerbauten/

(Aufgaben aus „Lambacher Schweizer – 9. Klasse und „Geometrie 9. Klasse" – Stark Verlag)

Mathematik – 9. Klasse – Trigonometrie - Lösungen

Anmerkung: Wenn es nicht anders verlangt ist, rundest Du gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle!

Aufgabe 1:
Bleiben wir zunächst einmal allgemein. Ergänze die fehlenden Angaben und übertrage sowohl die Gleichungen als auch die Zeichnung auf ein Extrablatt.

a) $\sin\alpha = \frac{k}{f}$

b) $\sin\gamma = \frac{h}{f}$

c) $\sin\delta = \frac{g}{f}$

d) $\tan\gamma = \frac{h}{e}$

e) $\cos\gamma = \frac{e}{f}$

f) $\cos\alpha = \frac{g}{f}$

Aufgabe 2:
Berechne die fehlenden Winkelgrößen mit Hilfe des Taschenrechners.
Tipps:
- Wenn du Winkel berechnen willst, musst du „SHIFT“ und „cos“, „sin“ oder „tan“ drücken!
- Achte auf die Einheiten!

a) $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\sin(\alpha) = \frac{7{,}9\text{ cm}}{10{,}2\text{ cm}} = \frac{79}{102} \mid \sin^{-1}$

$\alpha \approx \underline{50{,}8°}$

Taschenrechnereingabe:
SHIFT sin

$\cos(\beta) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\beta) = \frac{7{,}9\text{ cm}}{10{,}2\text{ cm}} = \frac{79}{102} \mid \cos^{-1}$

$\beta \approx \underline{39{,}2°}$

b) Umrechnung: 6,9 dm → 69 cm

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\alpha) = \frac{69\text{ cm}}{273\text{ cm}} = \frac{23}{91} \mid \cos^{-1}$

$\alpha \approx \underline{75{,}4°}$

$\sin(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\sin(\beta) = \frac{69\text{ cm}}{273\text{ cm}} = \frac{23}{91} \mid \sin^{-1}$

$\beta \approx \underline{14{,}6°}$

Innenwinkelsumme als Alternative möglich:
$180° - 90° - 75{,}4° = 14{,}6°$

c) $\tan(\delta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
$\tan(\delta) = \frac{15\text{ dm}}{23\text{ dm}} = \frac{15}{23} \mid \tan^{-1}$
$\delta \approx \underline{33{,}1°}$

$\tan(\gamma) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
$\tan(\gamma) = \frac{23\text{ dm}}{15\text{ dm}} = \frac{23}{15} \mid \tan^{-1}$
$\gamma \approx \underline{56{,}9°}$

Aufgabe 3:

a) Bestimme in dem Rechteck die Winkel α und β.

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
$\tan(\alpha) = \frac{5\text{ cm}}{12\text{ cm}} = \frac{5}{12} \mid \tan^{-1}$
$\alpha \approx \underline{22{,}6°}$

$\tan(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
$\tan(\beta) = \frac{12\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{12}{5} \mid \tan^{-1}$
$\beta \approx \underline{67{,}4°}$

Aufgabe 4:

Berechne die fehlenden Seitenlängen mit dem Taschenrechner.
Tipp: Achte auf die Einheiten!

a) $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
$\sin(26°) = \frac{25{,}2\text{ km}}{r} \mid \cdot\, r$
$\sin(26°) \cdot r = 25{,}2\text{ km} \mid : \sin(26°)$
$r = 25{,}2\text{ km} : \sin(26°)$
$r \approx \underline{57{,}5\text{ km}}$

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
$\tan(26°) = \frac{25{,}2\text{ km}}{p} \mid \cdot\, p$
$\tan(26°) \cdot p = 25{,}2\text{ km} \mid : \tan(26°)$
$p = 25{,}2\text{ km} : \tan(26°)$
$p \approx \underline{51{,}7\text{ km}}$

b) $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$
$\sin(52°) = \frac{x}{7\text{ cm}} \mid \cdot\, 7\text{ cm}$
$x = \sin(52°) \cdot 7\text{ cm}$
$x \approx \underline{5{,}5\text{ cm}}$

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
$\cos(52°) = \frac{y}{7\text{ cm}} \mid \cdot\, 7\text{ cm}$

$\cos(52°) \cdot 7 \text{ cm} = y$
$y \approx \underline{4{,}3 \text{ cm}}$

Für die Profis: Knifflige Anwendungsaufgaben

Aufgabe 5:
Ein **spitzer Winkel** in einem rechtwinkligen Dreieck wird vergrößert.
Wie ändert sich…

Tipp: Überlege dir zunächst die allgemeinen Formeln!

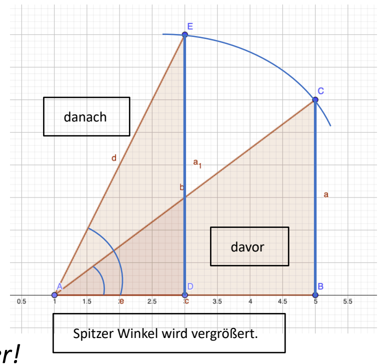
a) sein Sinuswert, wenn…

i) die Hypotenuse gleichbleibt?
Lsg.: Bei gleichbleibender Hypotenuse muss die Gegenkathete größer werden, der Sinuswert wird also auch größer.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) \nearrow = \frac{\text{Gegenkathete} \nearrow}{\text{Hypenuse}}$$

(Gib dies anhand von Zahlenbeispielen ein.)

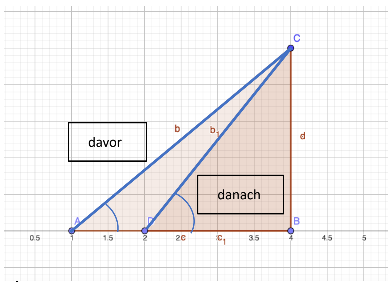


→ *Wenn man durch eine kleinere Zahl teilt, wird der Wert insgesamt größer!*

ii) die Gegenkathete gleichbleibt
Lsg.: Wird dagegen die Länge der Gegenkathete beibehalten, so müssen sowohl Ankathete als auch Hypotenuse verkleinert werden, um den betrachteten spitzen Winkel zu vergrößern. Der Sinuswert vergrößert sich somit, da die Hypotenuse im Nenner steht.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) \nearrow = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse} \searrow}$$



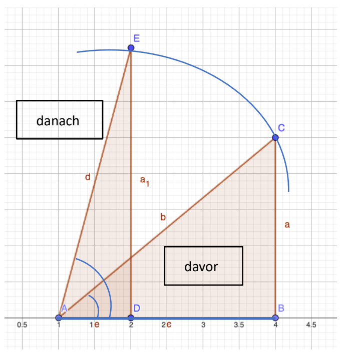
→ *Wenn man durch eine kleinere Zahl teilt, wird der Wert insgesamt größer!*

b) sein Kosinuswert, wenn…

i) die Hypotenuse gleichbleibt?
Lsg.: Bei gleichbleibender Hypotenuse wird die Ankathete kleiner, weshalb der Kosinuswert ebenfalls kleiner wird.
Ziel: größerer spitzer Winkel; Auswirkungen auf den Kosinuswert:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\alpha) \searrow = \frac{\text{Ankathete} \searrow}{\text{Hypotenuse}}$$

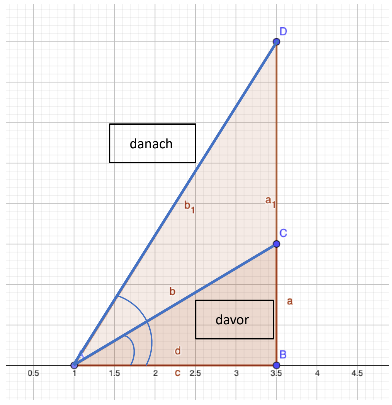
→ *Wenn man durch eine größere Zahl teilt, wird der Wert insgesamt kleiner!*



ii) die Ankathete gleichbleibt?
Lsg.: Bei gleichbleibender Ankathete verlängern sich Gegenkathete und Hypotenuse, was zu einem kleineren Kosinuswert führt.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) \searrow\ = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse} \nearrow}$$



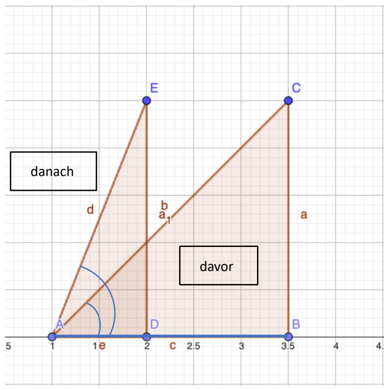
→ *Wenn man durch eine größere Zahl teilt, wird der Wert insgesamt kleiner!*

c) Sein Tangenswert, wenn…

i) die Gegenkathete gleichbleibt?
Lsg: Bei gleichbleibender Gegenkathete verkürzen sich Ankathete und Hypotenuse, was zu einem größeren Tangens führt.

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(\alpha) \nearrow = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete} \searrow}$$

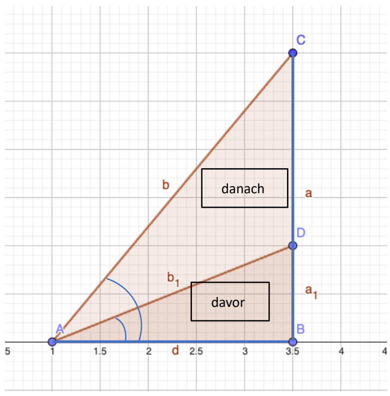


→ *Wenn man durch eine kleinere Zahl teilt, wird der Wert insgesamt größer!*

ii) die Ankathete gleichbleibt?
Bei gleichbleibender Ankathete wird die Gegenkathete größer. Der Tangens wird also auch größer.

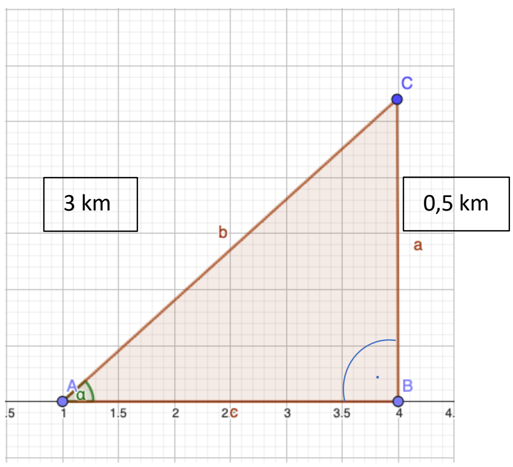
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(\alpha) \nearrow = \frac{\text{Gegenkathete} \nearrow}{\text{Ankathete}}$$



→ *Wenn man durch eine kleinere Zahl teilt, wird der Wert insgesamt größer!*

Aufgabe 6:
Ein Radfahrer fährt auf einen Berg.
Auf einer 3 km langen **geraden** Strecke
mit **gleichmäßiger** Steigung gewinnt er 500 m an Höhe.
Wie groß ist der Steigungswinkel der Strecke?



Die gefahrene Strecke (3 km) ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete der gegebene Höhenunterschied (500 m → 0,5 km) ist. Diese Kathete liegt gegenüber dem gesuchten Steigungswinkel α. Es ist somit die Hypotenuse und die Gegenkathete gegeben.

Es gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{0{,}5\ \text{km}}{3\ \text{km}} = \frac{1}{6} \mid \sin^{-1}$$

$$\alpha \approx \underline{9{,}6°}$$

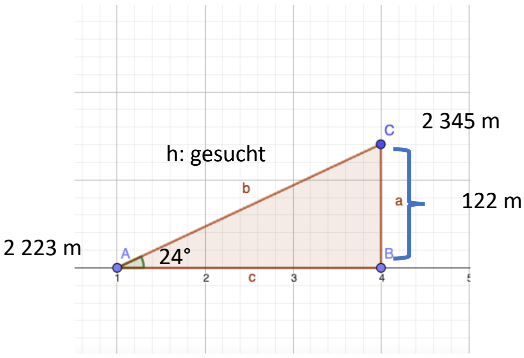
A: Der Steigungswinkel beträgt 9,6°.

(Denke bei Anwendungsaufgaben immer an einen Antwortsatz!)

Aufgabe 7:

Ein gleichmäßiger **Skihang** hat eine **Neigung** von **24°**,
die Bergstation liegt auf 2 345 m Höhe,
die Talstation auf 2 223 m Höhe.
Wie lang braucht ein Skifahrer,
der auf direktem Weg mit einer durchschnittlichen
Geschwindigkeit von 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ von der Berg- zur Talstadion fährt?

Gesucht ist die Länge der Hypotenuse des vom Hang gebildeten rechtwinkligen Dreiecks. Für den zurückgelegten Höhenunterschied gilt: h = 2 345 m – 2 223 m = <u>122 m</u>



Damit gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(24°) = \frac{122\ \text{m}}{\text{h}} \mid \cdot\, \text{h}$$

$$\sin(24°) \cdot \text{h} = 122\ \text{m} \mid : \sin(24°)$$

$$\text{h} = \frac{122\ \text{m}}{\sin(24°)}$$

$$\text{h} \approx \underline{300\ \text{m}}$$

Aus der Geschwindigkeit und der zurückgelegten Strecke lässt sich die dafür benötigte Zeit berechnen:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{300\ m}{20\frac{km}{h}} = \frac{0{,}300\ km}{20\frac{km}{h}} = 0{,}015\ \text{h} \overset{*\ 60}{=} 0{,}9\ \text{min} \overset{*\ 60}{=} \underline{54\ \text{s}}$$

A: Der Skifahrer benötigt etwa 54 s.

(Antwortsatz nicht vergessen!)

Aufgabe 8:

Die Pyramide des Kukulcán in Mexiko hat eine quadratische Grundfläche mit 55 m Kantenlänge und ist 30 m hoch.

a) Bestimme die Länge der Treppe.

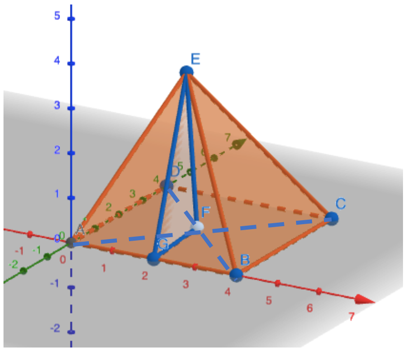
Lsg.: Mithilfe des Satzes des Pythagoras und des Dreiecks GFE kann man die Treppenlänge bestimmen. Die Länge $|\overline{GF}|$ entspricht der Hälfte der Kantenlänge, also $\frac{1}{2} \cdot |\overline{BC}|$.

$$|\overline{GE}| = \sqrt{|\overline{GF}|^2 + |\overline{FE}|^2}$$

$$|\overline{GE}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot |\overline{BC}|\right)^2 + |\overline{FE}|^2}$$

$$|\overline{GE}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot 55 \text{ m}\right)^2 + (30 \text{ m})^2}$$

$$|\overline{GE}| = \underline{40{,}7 \text{ m}}$$



A: Die Länge der Treppe beträgt 40,7 m.

b) Berechne den Neigungswinkel der Treppe gegen die Grundfläche.

Lsg.: Für den Neigungswinkel $\sphericalangle$ FGE gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{30 \text{ m}}{\frac{1}{2} \cdot 55 \text{ m}} = \frac{12}{11} \quad | \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha = \underline{47{,}5°}$$

Du kannst auch mit dem Sinus rechnen.
(Leichte Abweichungen durch Runden möglich!)

A: Der Neigungswinkel einer Seitenkante gegen die Grundfläche beträgt 47,5°.